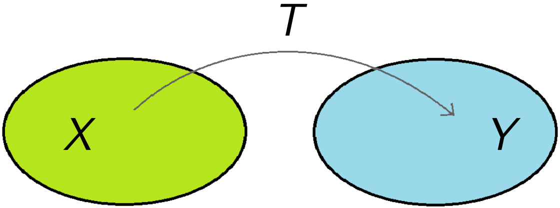
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 7

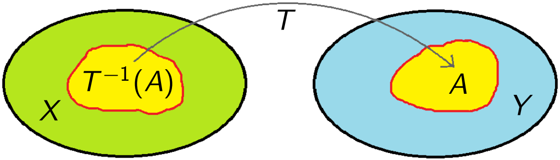
Funkcje mierzalne i obraz miary



Def. Niech $(X, \mathcal{F}_X)$ i $(Y, \mathcal{F}_Y)$ przestrzenie mierzalne. Odwzorowanie $T : X \to Y$ jest **mierzalne** (lub $\mathcal{F}_X$-$\mathcal{F}_Y$-**mierzalne**) jeżeli

$$\forall_{A \in \mathcal{F}_Y} \quad T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X$$

(czyli, gdy przeciwobraz zbioru mierzalnego jest zbiorem mierzalnym).



Lem. Jeśli $\mathcal{F}_Y = \sigma(\mathcal{G})$ jest generowana przez rodzinę $\mathcal{G} \subseteq 2^Y$, to

$$T : X \to Y \text{ mierzalne} \iff \forall_{A \in \mathcal{G}} \quad T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X$$

Dowód: „$\Longrightarrow$" jasne. „$\Longleftarrow$". Rodzina $\mathcal{F}_{ok} := \{A \subseteq Y : T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X\}$ jest σ-algebrą (przeciwobraz zachowuje sumy, przekroje i dopełnienia). Z założenia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_{ok}$. Stąd $\mathcal{F}_Y = \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{F}_{ok}$. Czyli T mierzalne. ■

Wn. Odwzorowania ciągłe są mierzalne (względem zbiorów borelowskich).

Dowód: Niech $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ przestrzenie topologiczne i niech $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{B}(Y) := \sigma(\mathcal{O}_Y)$ σ-algebry zbiorów borelowskich.

$$
\begin{aligned}
T : X \to Y \text{ odwzorowanie ciągłe } &\overset{Def}{\iff} \forall_{U \in \mathcal{O}_Y} \; T^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \\
&\overset{\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{B}(X)}{\implies} \forall_{U \in \mathcal{O}_Y} \; T^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X) \\
&\overset{Lem}{\implies} \forall_{U \in \mathcal{B}(Y)} \; T^{-1}(U) \in \mathcal{B}(X) \\
&\overset{Def}{\iff} T : X \to Y \text{ mierzalne } \blacksquare
\end{aligned}
$$

Uw. Funkcji mierzalnych jest dużo więcej niż ciągłych (bo zbiorów borelowskich jest dużo więcej, niż otwartych).

Prz. Funkcja charakterystyczna $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ zbioru $A \subseteq X$ jest dana wzorem

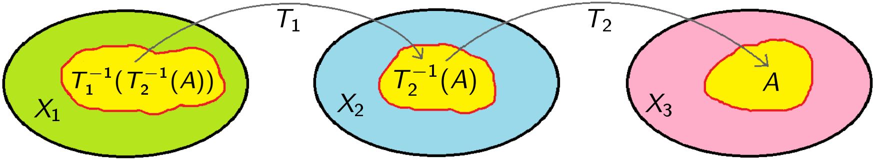
$$
\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}
$$

Jeśli X przestrzeń mierzalna, to $\mathbb{1}_A$ mierzalna $\iff$ A mierzalny.

Jeśli X przestrzeń topologiczna, to $\mathbb{1}_A$ ciągła $\iff$ A otwarto-domknięty.

Stw. Złożenie funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną.

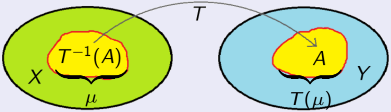
Dowód: Niech $(X_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2, 3$, przestrzenie mierzalne i niech $T_1 : X_1 \to X_2$ oraz $T_2 : X_2 \to X_3$ odwzorowania mierzalne. Wtedy $T_2 \circ T_1 : X_1 \to X_3$ oraz dla każdego $A \in \mathcal{F}_3$ mamy



$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}(\underbrace{T_2^{-1}(A)}_{\in \mathcal{F}_2}) \in \mathcal{F}_1 \qquad \blacksquare$$

Stw. Niech $T : X \to Y$ odwzorowanie mierzalne między przestrzeniami mierzalnymi $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$. Dla każdej miary μ na $(X, \mathcal{F}_X)$ wzór

$$\forall_{A \in \mathcal{F}_Y} \qquad T(\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A))$$



definiuje miarę na $(Y, \mathcal{F}_Y)$.

Dowód: $T(\mu)(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Jeśli $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_Y$ parami rozłączne, to

$$T(\mu)\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \overset{def}{=} \mu\Big(T^{-1}\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\Big) \xlongequal[\text{sumy i rozłączoność}]{\text{przeciwobraz zachowuje}} \mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n)\Big)$$

$$\xlongequal[\text{miary } \mu]{\sigma\text{-addytywność}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A_n)) \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} T(\mu)(A_n). \qquad \blacksquare$$

Def. Miarę $T(\mu)$ nazywamy **obrazem miary** μ przy odwzorowaniu T.

Prz. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przestrzeń probabilistyczna.

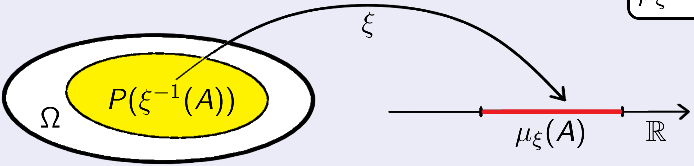
Zmienna losowa $\equiv$ **funkcja mierzalna** $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, tzn.

$$\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad \xi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

Rozkład zmiennej losowej $\xi \equiv$ **obraz miary** P **przy** ξ

$$\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \qquad \mu_\xi(A) := P(\xi \in A) = P(\xi^{-1}(A))$$

$$\boxed{\mu_\xi = \xi(P)}$$



Def. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą. Mówimy, że odwzorowanie mierzalne $T : X \to X$ **zachowuje miarę** μ lub też że miara μ jest **niezmiennicza ze względu na** T jeżeli $T(\mu) = \mu$, czyli

$$\forall_{A \in \mathcal{F}} \qquad \mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Prz. Miara Lebesgue'a jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia

$$\forall_{y \in \mathbb{R}^n} \forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} \ \lambda^n(y + A) = \lambda^n(A).$$

$(T(x) := x + y$ jest odwzorowaniem mierzalnym $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $T(\lambda^n) = \lambda^n)$

Def. Niech $O(n)$ oznacza zbiór macierzy ortogonalnych $n \times n$:

$$T \in O(n) \iff T^t \cdot T = I$$

Uw. Macierze $n \times n$ możemy traktować jako odwzorowania liniowe $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $T \in O(n)$
2. T zachowuje iloczyn skalarny $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
3. T zachowuje normę $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Tw. $T \in O(n) \Longrightarrow T(\lambda^n) = \lambda^n$ $\left(\begin{array}{c}\text{miara Lebesgue'a jest niezmiennicza}\\ \text{ze względu na liniowe izometrie}\end{array}\right)$

Dowód: Izometria T jest ciągła, więc mierzalna. Dla dowolnych $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$T(\lambda^n)(y+A) \overset{def}{=} \lambda^n(T^{-1}(y+A)) \xlongequal{\text{liniowość } T^{-1}} \lambda^n(T^{-1}(y) + T^{-1}(A))$$

$$\xlongequal[\text{na przesunięcia}]{\text{niezmienniczość } \lambda^n} \lambda^n(T^{-1}(A)) \overset{def}{=} T(\lambda^n)(A).$$

Czyli $T(\lambda^n)$ niezmiennicza na przesunięcia. Ponadto zauważmy, że

$$\begin{aligned} K(0,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Tx\| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : Tx \in K(0,r)\} = T^{-1}(K(0,r)) \end{aligned}$$

Stąd $T(\lambda^n)(K(0,r)) = \lambda^n(T^{-1}(K(0,r))) = \lambda^n(K(0,r)) < \infty$.

Zatem na mocy **Wn3** z wykładu 3, dla pewnego $c \geqslant 0$ mamy

$$T(\lambda^n) = c\lambda^n.$$

Ale skoro $c\lambda^n(K(0,r)) = T(\lambda^n)(K(0,r)) = \lambda^n(K(0,r))$, to $c = 1$. ∎

Def. Niech $GL(n)$ oznacza zbiór odwracalnych macierzy $n \times n$:

$$S \in GL(n) \iff \det(S) \neq 0 \iff S : R^n \to \mathbb{R}^n \text{ odwracalne}$$

Uw. $O(n) \subsetneq GL(n)$. Mianowicie, $T \in O(n) \implies \det(T) = \pm 1$.

Tw. (Obraz miary Lebesgue'a przy odwozorwaniu liniowym

$$S \in GL(n) \quad \implies \quad S(\lambda^n) = |\det(S^{-1})|\lambda^n = |\det(S)|^{-1}\lambda^n$$

Dowód: (Krok 1) Załóżmy, że $S = D$ diagonalna

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \lambda_1, \ldots \lambda_n > 0$$

Odwzorowanie $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Dx = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$ jest ciągłe, a więc mierzalne. Ponadto

$$\det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n \quad \text{oraz} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Czyli $D^{-1}x = (\lambda_1^{-1}x_1, ..., \lambda_n^{-1}x_n)$ oraz $\det(D^{-1}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}$. Stąd

$$\begin{aligned}
D(\lambda^n)([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)) &= \lambda^n\Big(D^{-1}([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n))\Big) \\
&= \lambda^n([\lambda_1^{-1}a_1, \lambda_1^{-1}b_1) \times \cdots \times [\lambda_n^{-1}a_n, \lambda_n^{-1}b_n)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i^{-1}b_i - \lambda_i^{-1}a_i| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}(b_i - a_i) \\
&= \det(D^{-1}) \cdot \lambda^n\Big([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)\Big)
\end{aligned}$$

Zatem $D(\lambda^n) = \det(D^{-1})\lambda^n$ z jednoznaczności miary.

(Krok 2). Wykorzystamy znany fakt z algebry, że każdą odwracalną macierz $S \in GL(n)$ można zapisać w postaci

$$S = T_1 D T_2, \quad \text{gdzie } T_1, T_2 \in O(n) \text{ oraz } D \text{ diagonalna}$$

z wartościami własnymi $\lambda_1, ...\lambda_n > 0$. Stąd dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$\begin{aligned}
S(\lambda^n)(A) &= \lambda^n((T_1 D T_2)^{-1}(A)) = \lambda^n(T_2^{-1} D^{-1} T_1^{-1}(A)) \\
&\overset{T_2 \in O(n)}{=} \lambda^n(D^{-1} T_1^{-1}(A)) \overset{\textbf{Krok 1}}{=} \det(D^{-1})\lambda^n(T_1^{-1}(A)) \\
&\overset{T_1 \in O(n)}{=} \det(D^{-1})\lambda^n(A).
\end{aligned}$$

Czyli $S(\lambda^n) = \det(D^{-1})\lambda^n$.

Ponadto zauważmy, że $T \in O(n) \Longrightarrow \det(T) \in \{-1, 1\}$, gdyż

$$\begin{aligned}\det(T)^2 &= \det(T)\det(T) = \det(T^t)\det(T) = \det(T^tT) = \det(I) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}|\det(S)| &= |\det(T_1 D T_2)| = |\det(T_1)\det(D)\det(T_2)| = |\det(D)| \\ &= \det(D).\end{aligned}$$

Czyli $\det(D^{-1}) = \det(D)^{-1} = |\det(S)|^{-1}$ i stąd

$$S(\lambda^n) = |\det(S)|^{-1}\lambda^n. \qquad \blacksquare$$